Динамо в сферической оболочке, управляемое собственными модами оператора Пуанкаре

Водинчар Г.М.[1,2], Фещенко Л.К.[1,2]
[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия
[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
gvodinchar@ikir.ru, kruteva_lu@mail.ru

Процесс формирования магнитных полей планет и звезд успешно объясняется теорией гидромагнитного динамо. Разработанные модели конвекции в жидких ядрах планет земного типа, газовых гигантах, конвективных зонах звезд позволяют получать течения, которые могут формировать магнитные поля, близкие по своей топологии к наблюдаемым.

Возможности вычислительных систем не позволяют вести прямое численное моделирование трехмерных задач планетарного динамо на геологических временных масштабах. Отметим, что известные теоремы запрета определяют принципиальную трехмерность задачи динамо. В связи с этим численные модели либо воспроизводят МГД-течения с хорошим разрешением по пространству на относительно небольших временных масштабах, порядка десятков тысяч лет, либо дают возможность просчитывать длительную эволюцию только крупномасштабных пространственных структур. Для моделей первого типа геометрическая структура течений просчитывается в процессе моделирования, а для моделей второго типа геометрическую крупномасштабную структуру конвекции надо изначально задавать.

В рамках второго подхода представляет интерес рассмотрение простейших моделей с "базисными" в некотором смысле геометрическими структурами течений. В качестве важнейшего примера надо назвать классическую систему Лоренца [1], которая сыграла огромную роль в понимании многих свойств конвекции в плоском слое и не потеряла актуальности до настоящего времени. Отметим, что система Лоренца получена именно путем выделения "базисных" течений. В задаче конвекции поле скорости разложено по собственным модам затухания уравнения Навье-Стокса, а температура разложена на моды пространственно согласованные с модами скорости. Далее проведено предельное усечение, сохраняющее нелинейность – одна мода скорости, согласованная с ней температурная мода, еще одна однородная по плоскости температурная мода. Затем стандартная процедура метода Галеркина дает динамическую систему для амплитуд мод – систему Лоренца.

В задачах планетарного динамо рассматривается конвекция во вращающейся сферической оболочке (жидком ядре планеты). Если вращения нет, то собственные моды затухания уравнения Навье-Стокса, т.е. решения спектральной задачи

$$\mu \mathrm{rot}\mathbf{v} + \triangle \mathrm{rot}\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T_{k,n,m} &= \mathrm{rot}\left(R^T_{kn}(r) Y^m_n(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right), \\ \mathbf{v}^S_{k,n,m} &= \mathrm{rotrot}\left(R^S_{kn}(r) Y^m_n(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения на собственные значения μ^T_{kn} и μ^S_{kn} и схема расчета функций $R^T_{kn}(r)$ и $R^S_{kn}(r)$ описаны в [6]. Данная система полей обладает свойствами ортогональности и полноты относительно скалярного произведения

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int \mathbf{p}\mathbf{q} d\mathbf{r}, \tag{3}$$

где интегрирование ведется по объему оболочки.

Эту базисную систему можно использовать и в случае вращающейся оболочки, но возникает необходимость использования нескольких мод скорости. В противном случае из галеркинской системы выпадают члены, соответствующие кориолисову ускорению. Это связано с тем, что каждая лапласова мода является либо тороидальной, либо полоидальной, а кориолисов снос тороидальной моды возбуждает полоидальные и наоборот. Построение маломодовых моделей геодинамо, основанных на этих разложениях и согласованных с косвенными данными о структуре конвекции описано в работах авторов [2-3].

Чтобы построить модель, содержащую только одну моду скорости необходимо, чтобы она была структурно устойчивой относительно диссипации и вращения одновременно. Такими свойствами обладают собственные колебания вращающейся жидкости.

Известна классическая задача Пуанкаре о собственных колебаниях вращающейся идеальной жидкости [4]

$$i\mu\varepsilon\mathbf{v} + 2\mathbf{k}\times\mathbf{v} + \nabla p = 0,$$

или, в равносильной формулировке,

$$i\mu\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{v} + 2\mathrm{rot}\,(\mathbf{k}\times\mathbf{v}) = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{k}$ – орт оси вращения, ε – число Россби, μ – действительное собственное значение, равное частоте соответствующего колебания. Она замыкается граничными условиями на скорость в виде условия непроницания $\mathbf{nv} = 0$, где $\mathbf{n}$ – нормаль к границе. Для шара, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр, есть точное решение этой задачи. Уже в случае сферической оболочки идеальной жидкости точные решения, по-видимому, неизвестны.

Аналогом этой задачи для вязкой жидкости является спектральная задача

$$\varepsilon\mu\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathrm{E}\bigtriangleup\mathrm{rot}\mathbf{v} - 2\mathrm{rot}\,(\mathbf{k}\times\mathbf{v}) = 0, \tag{5}$$

где E – число Экмана. Собственное значение μ в этой задаче комплексное и определяет частоту и затухание (обусловленное вязкостью) соответствующего колебания. При этом на границе обычно ставят условия прилипания в виде $\mathbf{v} = 0$, либо добавляют к условиям непроницания требование отсутствия касательных напряжений для тангенциальных компонент скорости.

Для случая сферической оболочки задача (5) изучалась в работе [5]. Установлены такие важные важные ее свойства как дискретность спектра, полнота системы собственных функций, получены оценки границ спектра. Однако точное решение этой задачи повидимому неизвестно. Будем называть далее ее решения вязкими модами Пуанкаре.

Ясно, что задачи (4) и (5) можно решать относительно собственного значения $\lambda = \varepsilon\mu$, что соответствует перемасштабированию времени на период вращения оболочки. При этом, если число Экмана мало, то собственные моды задач будут мало отличаться, и действительная часть собственного значения μ в задаче (5) будет близка к нулю.

Ясно, что определяемые сферическим гармониками поля (2) можно хорошо согласовать с разложением по сферическим же гармоникам полей температуры и магнитной индукции в задаче МГД-конвекции. В связи с этим предлагается аппроксимировать поля задачи (5) полями $\mathbf{v}^T_{k,n,m}$ и $\mathbf{v}^S_{k,n,m}$ в метрике скалярного произведения (3).

Отклонение Θ температуры от стационарного в сферическом слое гиперболического профиля раскладываем по собственным полям оператора Лапласа $\Theta_{k,n,n} = R_{kn}(r)Y_n^m(\theta,\phi)$. Магнитное поле также раскладываем по собственным полям оператора Лапласа $\mathbf{B}^T_{k,n,m} = \mathrm{rot}\left(Z^T_{kn}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right)$ и $\mathbf{B}^S_{k,n,m} = \mathrm{rotrot}\left(Z^S_{kn}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right)$.

Рассмотрим теперь схему построения модели динамо, управляемого одной из мод Пуанкаре $\mathbf{v}_1(r,\theta,\varphi)$. Кроме этой моды в модель входят 2 компоненты температуры – одна согласованная со скоростью Θ_1, другая однородная по сфере $\Theta_2 = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \varphi)$. Магнитное поле представим двумя модами – $\mathbf{B}_1$, согласованной со скоростной, и $\mathbf{B}_2$, в качестве которой возьмем вертикальную дипольную $\mathbf{B}^S_{0,1,0}$.

Тороидальные компоненты скорости не имеют радиальной составляющей и не влияют на структуру температурной моды Θ_1. Если в $\mathbf{v}_1$ полоидальная $\mathbf{v}^S_{k,n,m}$ входит с коэффициентом $\beta^S_{k,n,m}$, то включим в Θ_1 моду $\Theta_{k,n,n}$ с этим же коэффициентом.

Структура уравнения индукции $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \triangle \mathbf{B}$ показывает, что в первом приближении геометрия электрических токов в ядре совпадает с геометрией течений. Поэтому, если в моду скорости входит какая-либо тороидальная (полоидальная) мода, то в магнитную моду $\mathbf{B}_1$ включаем с тем же коэффициентом аналогичную ей полоидальную (тороидальную). Далее сдвигаем эту магнитную структуру относительно конвективной на некоторый угол ψ по долготе.

Вводя для мод $\mathbf{v}_1$, Θ_i, $\mathbf{B}_i$, амплитуды $\beta_1(t)$, $\alpha_i(t)$, $\gamma_i(t)$, соответственно, методом Галеркина получим динамическую систему для амплитуд

$$\begin{aligned}
&\varepsilon A \frac{d\beta_1}{dt} = -\mathrm{E}B\beta_1 + \mathrm{Ra}_m C\alpha_1 - L\sin\psi\gamma_1\gamma_2,\\
&Q_1\frac{d\alpha_1}{dt} = -F_1\beta_1\alpha_2 + H_1\beta_1 - qS_1\alpha_1, \quad Q_2\frac{d\alpha_2}{dt} = F_2\beta_1\alpha_1 - qS_2\alpha_2,\\
&P_1\frac{d\gamma_1}{dt} = W_1\sin\psi\beta_1\gamma_2 - M_1\gamma_1, \quad P_2\frac{d\gamma_2}{dt} = W_2\sin\psi\beta_1\gamma_1 - M_2\gamma_2,
\end{aligned} \tag{6}$$

где Ra_m – модифицированное число Рэлея, q – число Робертса, а за единицу времени принято характерное время омической диссипации h^2/ν_m, где h – толщина оболочки, ν_m – магнитная вязкость. Большими буквами в этой системе обозначены интегралы по слою от некоторых скалярных комбинаций базисных мод, причем всегда A, B, Q_i, S_i, P_i, M_i, F_1F_2, LW_2, W_1W_2 положительные. При этом предполагаем, что $\sin\psi \neq 0$, т.к. в противном случае нет "зацепления" скорости и магнитного поля.

Выполним в системе замену времени и амплитуд по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&t = \frac{Q_1}{qS_1}\tau, \quad \beta_1(t) = qS_1\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1F_1F_2}}u_1(\tau), \quad \alpha_1(t) = \frac{qS_1\mathrm{E}B}{\mathrm{Ra}_m C}\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1F_1F_2}}\theta_1(\tau),\\
&\alpha_2(t) = \frac{qS_1\mathrm{E}B}{\mathrm{Ra}_m CF_1}\theta_2(\tau), \quad \gamma_1(t) = \frac{qS_1}{Q_1|\sin\psi|}\sqrt{\frac{\varepsilon AP_2}{LW_2}}B_1(\tau),\\
&\gamma_2(t) = qS_1\mathrm{sgn}\,(W_2\sin\psi)\sqrt{\frac{W_2Q_2\varepsilon A}{Q_1P_2F_1F_2L}}B_2(\tau)
\end{aligned} \tag{7}$$

В новых переменных система примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{du_1}{d\tau} = \sigma\,(\theta_1 - u_1) - B_1B_2,\\
&\frac{d\theta_1}{d\tau} = -u_1\theta_2 + ru_1 - \theta_1, \quad \frac{d\theta_2}{d\tau} = u_1\theta_1 - b\theta_2,\\
&\frac{dB_1}{d\tau} = pu_1B_2 - cB_1, \quad \frac{dB_2}{d\tau} = u_1B_1 - fB_2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\sigma = \dfrac{\mathrm{E}BQ_1}{\varepsilon AqS_1} > 0$, $r = \dfrac{H_1\mathrm{Ra}_mC}{qS_1\mathrm{E}B} > 0$, $b = Q_1/Q_2 > 0$, $p = \dfrac{W_1W_2\sin^2\psi Q_1Q_2}{P_1P_2F_1F_2} > 0$, $c = \dfrac{M_1Q_1}{qS_1P_1} > 0$, $f = \dfrac{M_2Q_1}{qS_1P_2} > 0$.

Видно, что если положить в этой системе $B_1 \equiv B_2 \equiv 0$, то она превращается в систему Лоренца. Если же оставить в ней первое, четвертое и пятое уравнения и считать в первом θ_1 постоянной, то возникает система, похожая на систему двухдискового динамо Рикитаки с трением, когда трение в обоих дисках совпадает [6].

Рассмотрим состояния равновесия, возникающие в этой системе.

Если $r < 1$, то система имеет только нулевую точку покоя D_0, причем асимптотически устойчивую. Если $1 < r < 1 + \dfrac{fc}{pb}$, то к нулевой точке добавляются еще две $D_{1,2} = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}; \pm\sqrt{b(r-1)}; r-1; 0; 0\right)$, при этом нулевая точка теряет устойчивость. Если $r > 1 + \dfrac{fc}{pb}$, то добавляются еще четыре положения равновесия с ненулевыми значениями магнитного поля

$$D_{3-6}\left(\pm\sqrt{\frac{fc}{p}}; \pm\frac{rb\sqrt{fcp}}{d}; \frac{rfc}{d}; \pm(\mp)\sqrt{\frac{\sigma f(rbp-d)}{d}}; \pm(\mp)\sqrt{\frac{\sigma c(rbp-d)}{pd}}\right), \tag{9}$$

где $d = fc + bp$. Отметим, что все точки покоя разбиваются на три группы, постепенно возникающие при росте параметра r, имеющего смысл относительного числа Релея. В пределах каждой группы точки очевидно переходят друг в друга при симметриях системы (8), поэтому топологические свойства таких точек одинаковы. При этом переходы между точками D_3 и D_4, D_5 и D_6 соответствуют смене знака магнитного поля без смены направления течений, т.е. инверсиям поля.

Система (8) содержит 6 параметров. Можно ожидать, что варьируя их можно получать различные режимы работы динамо. Далее предполагается исследование поведения системы при варьировании параметров и при подстановке в качестве значений параметров реальных физических параметров астрофизических объектов.

Работа выполнена по Программе № 10 Президиума РАН и при поддержке ДВО РАН (проект 10-III-В-07-158) и Минобрнауки России (Программа стратегического развития КамГУ им. Витуса Беринга на 2012-2016 г.г.).

Литература

1. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // Journal Atmos. Sci. – 1963. – V. 20. – P. 130-141.

2. *Водинчар Г.М., Шевцов Б.М.* Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14. – № 4. – С. 3–15.

3. *Водинчар Г.М., Крутьева Л.К.* Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16. – № 2. – С. 35–44.

4. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрметеоиздат, 1975.

5. *Резников Е.Л., Розенкноп Л.М.* О собственных колебаниях вращающейся вязкой жидкости во внешнем ядре Земли // Вопросы геодинамики и сейсмологии (Вычислительная сейсмология. Вып. 30). – М.: Геос, 1998. С. 121-132.

6. *Ershov S.V., Malinetskii G.G., Rusmaikin A.A.* A generalized two-disk dynamo model // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. – 1989. – V. 47. – P. 251-277.

Dynamo in a spherical shell, controlled by Poincaré operator eigenmodes

Vodinchar G.M., Feshchenko L.K.

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation FEB RAS

In the study of the mechanisms of planetary dynamo, various options for the problem of conducting fluid convection in a rotating spherical shell appear. Application of spectral methods for the solution of these problems raises the question on the choice of the basis to present the fields of velocity, temperature and magnetic field. The paper suggests to apply Poincaré operator eigenmode approximations as the basis for velocity. The geometrical structure of these modes corresponds to free oscillations of ideal rotating fluid and seems to be the most natural from all the considered problems.

In this work the large-scale approximations of Poincaré modes and low-mode models of convection in conducting rotating shells are proposed. The models present velocity as an approximation of one of Poincaré modes by spherical harmonics, the temperature field and magnetic field are specified by spherical harmonics structurally consistent with the velocity. It is shown that dipole magnetic field is generated in this type of modes.

It is shown, that inhomogeneities in the Earth's liquid core density may geometrically correspond to one of Poincaré modes, according to the splitting-functions of its free oscillations.