

# Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель

БОГАТОВ Н.А.

Институт прикладной физики РАН, Россия

bogatov@appl.sci-nnov.ru

Капиллярные колебания проводящей капли, заряженной или помещенной во внешнее электрическое поле, вызывают изменение во времени распределения заряда на меняющейся поверхности капли, что, в свою очередь, приводит к генерации электромагнитного излучения и переменного квазистатического электрического поля. Этот эффект, в принципе, может давать вклад в генерацию переменного электрического поля (как волнового, так и квазистатического) электризованными облаками и облаками, находящимися в областях с повышенным уровнем атмосферного электрического поля. Оценка мощности излучения грозового облака в результате этого эффекта была сделана в работе [1], где был выполнен приближенный аналитический расчет интенсивности излучения колеблющейся проводящей заряженной капли (в отсутствие внешнего постоянного поля). Однако в работе [1] была допущена ошибка при вычислении мнимой части частоты колебаний капли, отчего полученная в итоге зависимость интенсивности излучения от номера моды колебаний капли противоречит качественным физическим соображениям, а величина интенсивности оказывается сильно завышенной. Подобный [1] результат был получен и в работе [2], где учитывалась вязкость жидкости.

Настоящий доклад посвящен корректному расчету переменного электрического поля колеблющейся капли, одновременно заряженной и помещенной во внешнее электрическое поле. Ситуации заряженной капли без внешнего поля и незаряженной во внешнем поле являются частными случаями рассмотренной здесь задачи. Вычислены абсолютные спектры излучения электромагнитных волн и колебаний квазистатического поля, генерируемые стохастическими капиллярными колебаниями капель типичного грозового облака. Получено, что интенсивность всех этих полей существенно ниже фонового уровня. Проанализирована возможность когерентного возбуждения капиллярных колебаний ансамбля капель, находящихся в однородном постоянном электрическом поле. Синфазное возбуждение колебаний капель в облаке может происходить в результате резкого, с характерным временем, меньшим периода колебаний капель, изменения величины электрического поля в облаке. Такая ситуация реализуется в грозовых облаках после молниевых разрядов, и может иметь место в облаках над сейсмически активными районами. Выполнен расчет величин и спектров генерируемых при этом волнового и квазистатического электрических полей. При характерных для грозового облака параметрах, электрические поля синфазно колеблющихся капель превышают фоновый уровень и могут давать заметный вклад в переменное электрическое поле грозового облака в некоторых участках частотного спектра.

## Одна капля

Рассмотрим колебания капли идеальной проводящей жидкости, обладающей зарядом  $Q$  и помещенной во внешнее поле  $E_\infty$ . Амплитуду колебаний предположим малой по сравнению с длиной волны капиллярных волн (для колебаний низших мод это условие эквивалентно условию малости амплитуды колебаний по сравнению с радиусом капли), а заряд капли и внешнее электрическое поле достаточно малыми для того, чтобы несущественно влиять

на колебания капли. Тогда колебания капли можно представить в виде суммы колебаний на собственных частотах  $\omega_l$ :

$$\omega_l^2 = \frac{\alpha R_0^{-3}}{\rho} l(l-1)(l+2) \quad l \geq 2 \quad (1)$$

где  $R_0$  – радиус невозмущенной капли,  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  – плотность жидкости,  $l$  – номер моды. Электрическое поле представим в виде суммы поля  $E_0$  вокруг невозмущенной заряженной сферы и полей  $E_l$ , связанных с модами  $l$  колебаний капли:

$$\vec{E}(r, \theta, t) = \vec{E}_0 + \sum_l \vec{E}_l(r, \theta) e^{i\omega_l t} \quad E_0 = -\nabla\varphi_0 \quad \varphi_0 = \frac{Q}{r} - E_\infty \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right) r \cos\theta \quad (2)$$

Общее решение уравнений максвелла для электрического поля можно представить в виде разложения по сферическим функциям:

$$\vec{E}_l(r, \theta) = \frac{1}{r} \sum_n C_n \left[ \vec{i}_r h_n^{(2)}(k_l r) P_n(\cos\theta) + \vec{i}_\theta \frac{1}{n(n+1)} \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \frac{d\left(r h_n^{(2)}(k_l r)\right)}{dr} \right] \quad (3)$$

где  $P_n(\cos\theta)$  – полиномы Лежандра,  $h_n^{(2)}(k_l r)$  – сферические функции Бесселя четвертого рода,  $k_l = \omega_l/c$ ,  $c$  – скорость света,  $C_n$  – произвольные константы. Коэффициенты  $C_n$  найдем из условия равенства нулю тангенциальной компоненты поля на поверхности капли. Отличными от нуля будут только три коэффициента с  $n = (l-1)$ ,  $l$ ,  $(l+1)$ . То есть в капле, у которой возбуждены капиллярные колебания  $l$  – й моды, заряд приводит к появлению зарядов и токов, соответствующих мультиполю порядка  $l$ , а внешнее электрическое поле – к появлению зарядов и токов, соответствующих двум мультиполям:  $(l-1)$ -го и  $(l+1)$ -го порядка. С учетом малости параметра  $k_l R_0$ , имеющего порядок отношения скорости капиллярных волн к скорости света, выражения для коэффициентов приводятся к виду:

$$C_{l-1} \approx i \frac{3(l-1)^2 l!}{2(l+1)(2l-1)!} (2k_l R_0)^l E_\infty \xi_l, \quad C_l \approx i \frac{(l+1)!}{2(2l)!} (2k_l R_0)^{l+1} \frac{Q}{R_0^2} \xi_l, \quad C_{l+1} \approx i \frac{3(l+2)^2 (l+2)!}{2l(2l+3)!} (2k_l R_0)^{l+2} E_\infty \xi_l \quad (4)$$

### Волновое поле. $k_l r \gg 1$ .

Мощность излучения  $l$  моды колебаний капли найдем, проинтегрировав поток электромагнитной энергии на бесконечности.

$$W_l = \frac{c}{2} \xi_l^2 E_\infty^2 (2k_l R_0)^{2l} \left[ \frac{l!}{(2l)!} \right]^2 \left\{ \frac{9l(l-1)^3}{(2l-1)(l+1)^2} + \frac{l}{4(2l+1)(l+1)} (2k_l R_0)^2 \frac{Q^2}{R_0^4 E_\infty^2} + \frac{9(l+2)^5}{16(2l+1)^2(2l+3)^3(l+1)} (2k_l R_0)^4 \right\} \quad (5)$$

Ввиду крайней малости параметра  $2k_l R_0$  из (5) следует, что: а) излучение мультипольности  $(l-1)$  всегда много больше излучения мультипольности  $(l+1)$ ; б) излучение, связанное с зарядом капель может сравниться с излучением, связанным с поляризацией капель во внешнем электрическом поле только при очень малой величине последнего, что может иметь место в атмосфере лишь в очень малых областях; в) мощность излучения быстро

уменьшается с ростом номера моды  $l$ . Поэтому можно утверждать, что при широкополосном возбуждении колебаний капли (возбуждении широкого спектра мод) в полной мощности  $W$  излучении капли всегда будет преобладать дипольное излучение, вызванное колебанием капли на основной моде  $l = 2$ :

$$W \approx W_2 \approx \frac{c}{27} \xi_2^2 E_\infty^2 (k_2 R_0)^4 \quad (6)$$

Подставляя в (6)  $k_2 = \omega_2/c$  из (1) получим:

$$W \approx \left(\frac{4}{3c}\right)^3 \left(\frac{\alpha \xi_2 E_\infty}{\rho R_0}\right)^2 \quad (7)$$

Из (7) видно, что при заданной относительной амплитуде колебаний  $\xi_2/R_0$  мощность излучения от размера капель не зависит. Плотность потока  $S_1$  излучения одной капли в направлении максимума диаграммы направленности излучения  $\theta = \pi/2$  равна:

$$S_1 = \frac{c}{8\pi} |E_{2\max}|^2 = \frac{3}{2} \frac{W_2}{4\pi r^2} \quad (8)$$

### Квазистатистическое поле. $k_l r \ll 1$ .

На расстоянии от капли, много меньшем длины волны электромагнитного излучения с частотой  $\omega_l$ , то есть при условии  $k_l r \ll 1$ , из (3,4) найдем:

$$\begin{aligned} \vec{E}_l = & -\frac{\xi_l}{r} \left\{ \frac{6(l-1)^3 l}{l+1} \left(\frac{R_0}{r}\right)^l E_\infty \left( \vec{i}_r P_{l-1} - \vec{i}_\theta \frac{1}{l} \frac{dP_{l-1}}{d\theta} \right) + 2(l+1) \frac{Q}{R_0^2} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{l+1} \times \right. \\ & \left. \times \left( \vec{i}_r P_l - \vec{i}_\theta \frac{1}{l+1} \frac{dP_l}{d\theta} \right) + \frac{3(l+2)^3}{l(2l+3)} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{l+2} E_\infty \left( \vec{i}_r P_{l+1} - \vec{i}_\theta \frac{1}{l+2} \frac{dP_{l+1}}{d\theta} \right) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

Ввиду крайней малости параметра  $R_0/r$  из (9) следует, что первый член в фигурных скобках, соответствующий полю мультипольности  $(l-1)$ , будет много больше двух других членов, и что амплитуда поля быстро уменьшается с ростом номера моды  $l$ . Поэтому в суммарном переменном квазистатистическом электрическом поле колеблющейся капли всегда будет преобладать дипольная компонента, вызванная колебаниями на основной моде  $l = 2$ :

$$\vec{E} \approx \vec{E}_2 = \frac{4\xi_2}{r} \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 E_\infty \left( \vec{i}_r P_1 - \vec{i}_\theta \frac{1}{2} \frac{dP_1}{d\theta} \right)$$

Максимальная амплитуда  $E_1$  переменного поля одной капли (в направлениях  $\theta = 0, \pi$ ) равна:

$$E_1 = \left| \vec{E}_2 \right|_{\max} \approx \frac{4}{r} \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 E_\infty \xi_2 \quad (10)$$

### Ансамбль капель. Стохастические колебания

Спектр излучения облака колеблющихся в электрическом поле капель определяется распределением капель по размерам  $n(R_0)$ :

$$S_f = S_1 \cdot n(R_0(\omega)) \frac{dR_0(\omega)}{d\omega} \cdot 2\pi \quad \omega = 2\pi f \quad , \quad (11)$$

где  $R_0(\omega) = (8\alpha/\rho\omega^2)^{1/3}$  – зависимость радиуса капли от круговой частоты основной моды колебаний ( $l = 2$ ) из формулы (1). Спектр размеров облачных капель в диапазоне  $R_0 \subset (1 \div 100)$  мкм описывается с помощью гамма распределения [3]:

$$n(R_0) = \frac{N_0}{\Gamma(\alpha_r + 1)\beta^{\alpha_r+1}} R_0^{\alpha_r} \exp\left(-\frac{R_0}{\beta}\right) \quad (12)$$

где  $N_0$  – концентрация капель,  $\alpha_r$  и  $\beta$  – параметры распределения. Типичный разброс значений параметров  $N_0 = 100 - 200 \text{ см}^{-3}$ ,  $\alpha_r = 2 \pm 1$ ,  $\beta = 0.3 - 3$  мкм. Выберем для оценки сверху величины спектральной плотности  $S_f$  значения параметров  $N_0 = 200 \text{ см}^{-3}$ ,  $\alpha_r = 3$ ,  $\beta = 3$  мкм. Далее для оценки положим  $\xi_2/R_0 \sim 0.3$  и возьмем характерную для развитого грозового облака величину  $E \sim 1 \text{ кВ/см}$ . Тогда максимальная спектральная плотность потока излучения из облака объемом  $10^3 \text{ км}^3$  на расстоянии  $10 \text{ км}$  составит:

$$S_f \approx S_1 \cdot 10^{-3} \approx 10^{-25} \text{ Вт/см}^2\text{кГц},$$

что ниже порога чувствительности приемной аппаратуры ( $10^{-23} \div 10^{-24}$ )  $\text{Вт/см}^2\text{кГц}$  и на несколько порядков величины меньше интенсивности излучения конвективных облаков в этом диапазоне частот [4].

Среднеквадратичная величина поля  $E_N$ , создаваемого ансамблем из  $N$  одинаковых капель со случайной фазой колебаний в  $\sqrt{N}$  раз больше поля одной капли. Амплитудно-частотная характеристика квазистатического поля, создаваемого облаком колеблющихся капель, снова определяется распределением капель по радиусу  $n(R_0)$ :

$$E_f \approx 4 \left(\frac{\xi_2}{R_0}\right) \frac{R_0(\omega)^3}{r^3} E_\infty \left[ n(R_0(\omega)) \frac{dR_0(\omega)}{d\omega} 2\pi V \right]^{1/2} \quad \omega = 2\pi f \quad (13)$$

Из (13) видно, что при заданной водности облака  $NR_0^3 = \text{const}$  поле  $E_N$  растет пропорционально  $(R_0)^{3/2}$ . Рост относительного вклада в квазистатическое поле в спектре (13) обусловлен множителем  $(R_0/r)^3$ . Распределение облачных капель по размерам в диапазоне  $R_0 \subset (100 \div 2000)$  мкм описывается степенной зависимостью [3]:

$$n(R_0) = \frac{(\delta - 1) N_{100}}{100} \left(\frac{100}{R_0}\right)^\delta \quad (14)$$

где  $R_0$  измеряется в мкм. Типичные значения параметров этого распределения  $\delta = 6 - 7$ ,  $N_{100} = 100 - 500 \text{ м}^{-3}$  [3]. Максимальная величина  $E_f$  для обоих распределений не превышает  $10^{-5} \text{ мкВ/м} \cdot \text{Гц}^{1/2}$ , что опять же меньше порога чувствительности измерительных приборов и намного меньше величины переменного поля, генерируемого конвективными облаками в герцовом и килогерцовом диапазонах частот [4].

Таким образом, переменное электромагнитное поле, вызываемое случайными (несинхронизованными) колебаниями капель (в том числе заряженных) в электризованных облаках, не дает заметного вклада в волновое и квазистатическое электрические поля облаков.

## Ансамбль капель. Синфазные колебания

Вытягивание капли в электрическом поле, не слишком близком к критическому относительно электрогидродинамической неустойчивости, приблизительно равно  $\xi_p \approx \frac{3E_\infty^2 R_0^2}{16\pi\alpha}$ . Соответственно, амплитуда колебаний, возбуждаемая быстрым по сравнению с периодом колебаний капли, изменением внешнего поля, равно:  $\Delta\xi_p \approx \frac{3}{16} \frac{R_0^2}{\pi\alpha} \Delta(E^2)$ , где  $\Delta(E^2)$  – изменение квадрата внешнего поля  $E_\infty$ . Амплитуды электрических полей (как волновых, так и квазистатических) ансамбля колеблющихся капель будут складываться, если длина волны электромагнитного излучения на частоте колебаний капель будет много больше геометрического размера ансамбля:

волновое поле:  $E(f) = V \frac{E_\infty \Delta(E^2)}{2\pi r \rho c^2} R_0(f) n(R_0(f)) \frac{dR_0(f)}{df}$ , (15)

квазистатическое поле:  $E(f) = -V \frac{E_\infty \Delta(E^2)}{4\pi \alpha r^3} R_0^4(f) n(R_0(f)) \frac{dR_0(f)}{df}$ . (16)

Количественная оценка квазистатического поля (16) для облаков с параметрами  $V = 10^3 \text{ км}^3$ ,  $E_\infty = 1 \text{ кВ/см}$ ,  $\Delta(E^2) = 15 \text{ кВ}^2 \text{ см}^2$ ,  $r = 20 \text{ км}$ ,  $n(R = 1 \text{ мм}) = (10^{-4} \div 10^{-2}) \text{ см}^{-4}$  дает величину  $E(f) \sim 10^{-3} \text{ В/м} \cdot \text{Гц}$  на частоте 100 Гц, что на порядок превышает фоновый уровень.

## Литература

1. *Калечич В.И., Назутин И.Е., Полуэтов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР, т.262, 1982. С. 1344.
2. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Голованов А.С.* Влияние релаксации заряда на электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли // Письма в ЖТФ, т.28, в.2, 2002. С. 6.
3. Справочник Облака и облачная атмосфера под ред. И. П. Мазина и А. Х. Хргиана, Л.: Гидрометеиздат, 1989.
4. *Качурин Л.Г., Кармов М.И., Медалиев Х.Х.* Основные характеристики радиоизлучения конвективных облаков // Физика атмосферы и океана, т. 10, №11, 1974. С. 1163.

## The electromagnetic field generated by capillary drops oscillations

*Bogatov N.A.*

*Institute of Applied Physics RAS, Russia*

The exact solution for the full electromagnetic field generated by capillary oscillations of a drop of an ideal conducting liquid electrically charged and subnintuted to external homogeneous constant electric field was found in this report. The calculation of absolute spectra of electromagnetic radiation and quasistatic electric field generated by a cloud of drops stochastic oscillating at typical clod volume and drop density and size distribution was fulfilled. The intensity of these fields turn to be much less than the background. Examined the situation of the common-mode excitation of oscillations in an ensemble of cloud drops, which can take place in the storm clouds, after lightning discharges. In this case, the amplitude spectral density of the quasi-static electric field generated by drops oscillations in a typical thunderstorm cloud at a distance of tens of kilometers from it is comparable with the typical level of the spectrum of the electric field near storm clouds. Probably, the common-mode excitation of drops can occur in the clouds above the centers of seismic activity in moments of sudden changes of atmospheric fields.